OPCIÓN A

1.- Hallar el valor de m para que la función $f(x) = \begin{cases} 6 - m(x+2)^2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 3 + \dfrac{2}{m(x+2)} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$ **sea derivable en x = -1.**

Para ser derivable la función tiene que ser, inicialmente, continua y después tener derivada igual en el punto de discontinuidad

$$\begin{cases} \begin{cases} f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 6 - m(-1+2)^2 = 6 - m\cdot 1^2 = 6 - m \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 3 + \dfrac{2}{m(-1+2)} = 3 + \dfrac{2}{m\cdot 1} = 3 + \dfrac{2}{m} \end{cases} \Rightarrow f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \\ 6 - m = 3 + \dfrac{2}{m} \Rightarrow 3 = m + \dfrac{2}{m} \Rightarrow 3m = m^2 + 2 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 1 \end{cases} \end{cases}$$

La función es continua para $m = 2 \ o \ m = 1$.Veamos si la función es derivable para esos valores

$$f'(x) = \begin{cases} -2m(x+2) & si \quad x < -1 \\ \dfrac{2}{m}\dfrac{-1}{(x+2)^2} = \dfrac{-2}{m(x+2)^2} & si \quad x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = -2m(-1+2) = -2m \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \dfrac{-2}{m(-1+2)^2} = -\dfrac{2}{m} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to -\sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to -\sqrt{2}^+} f'(x) \Rightarrow -2m = -\frac{2}{m} \Rightarrow m = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

La función es derivable cuando **m = 1.**

2.- a) Dibujar las gráficas aproximadas de f(x) = x^2 – 4x + 3 y g(x) = 3 + 4x – x^2, señalando los puntos de corte entre ambas curvas.

b) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las dos funciones del apartado a)

$a)$

$$x^2 - 4x + 3 = 3 + 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x-4) = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Extremo\ relativo\ de\ la\ parábola \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ en\ x = 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = -1$$

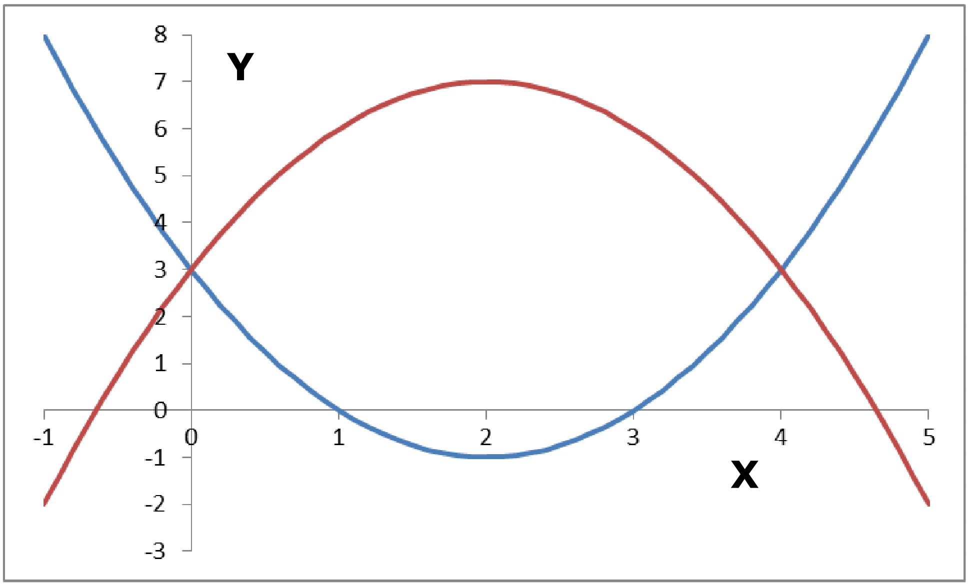
$$Extremo\ relativo\ de\ la\ parábola \Rightarrow g'(x) = -2x + 4 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f''(x) = -2 > 0 \Rightarrow Máximo\ en\ x = 2 \Rightarrow f(2) = 3 + 4\cdot 2 - 2^2 = 7$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 12 = 28 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases} \end{cases}$$

Continuación del Problema 2 de la opción A

a) Continuación



b)

$$A=\int_0^1\left(-x^2+4x+3\right)dx-\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx+\int_1^3\left(-x^2+4x+3\right)dx+\left|\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)dx\right|+$$

$$+\int_3^4\left(-x^2+4x+3\right)dx-\int_3^4\left(x^2-4x+3\right)=\int_0^4\left(-x^2+4x+3\right)dx-\int_0^4\left(x^2-4x+3\right)dx=\int_0^4\left(-2x^2+8x\right)dx=$$

$$=-2\int_0^4 x^2\,dx+8\int_0^4 x\,dx=-\frac{2}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^4+\frac{8}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^4=-\frac{2}{3}\cdot\left(4^3-0^3\right)+4\cdot\left(4^3-0^3\right)=-\frac{128}{3}+64=\frac{192-128}{3}=\frac{64}{3}\,u^2$$

3.- Resolver el siguiente sistema matricial AXB = C siendo

$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}AXB=A^{-1}C\Rightarrow IXB=A^{-1}C\Rightarrow XB=A^{-1}C\Rightarrow XBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1}\Rightarrow XI=A^{-1}CB^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\ A^t\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ A^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow adj\ B^t=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l}A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ B^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right.\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

4.- Sean A y B los puntos de coordenadas A(0,1,0) y B(0,-3,1)

a) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 5 = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

b) Hallar el punto de intersección del plano z = 0 y la recta con vector director (2,-1,1) que pasa por B.

a)
El vector director del haz de planos que determina la recta **r** es paralelo al vector **AB** y por lo tanto sus componentes son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} Haz\ de\ planos \Rightarrow x - y - 5 + \lambda(2x + y + z) = 0 \Rightarrow (1+2\lambda)x + (\lambda - 1)y + \lambda z - 5 = 0 \\ \overrightarrow{AB} = (0\,,3\,,-1) - (0\,,1\,,0) = (0\,,2\,,-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{Haz\ de\ planos}} = (1+2\lambda\,,\lambda-1\,,\lambda) \\ \overrightarrow{AB} = (0\,,2\,,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1+2\lambda}{0} = \frac{\lambda-1}{2} = \frac{\lambda}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+2\lambda}{0} = \dfrac{\lambda-1}{2} \Rightarrow 2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1+2\lambda}{0} = \dfrac{\lambda}{-1} \Rightarrow -1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$Plano\ pedido \Rightarrow x - y - 5 + \frac{1}{2}(2x + y + z) = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 10 + 2x + y + z \Rightarrow \pi \equiv 4x - y + z - 10 = 0$$

b) Sea le recta **r** y **Q** el punto de intersección de la recta y el plano dado

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + \mu \end{cases} \Rightarrow Punto\ de\ \text{int}\,er\,\text{sec}\,ción \Rightarrow -1 + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow Q\begin{cases} x = 2 \cdot 1 \\ y = 3 - 1 \\ z = -1 + 1 \end{cases} \Rightarrow Q(2\,,2\,,0)$$

OPCIÓN B

1.- Dada la función f(x) = ln(2x – x²), se pide

a) Determinar su dominio.

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

$a)$

$$2x - x^2 > 0 \Rightarrow x\left(2-x\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2 - x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

	$-\infty$	0	2	∞
x > 0	**(-)**	**(+)**	**(+)**	
x < 2	**(+)**	**(+)**	**(-)**	
Solución	**(-)**	**(+)**	**(-)**	

$Dom\left(f\right) = \forall x \in \Re / 0 < x < 2$

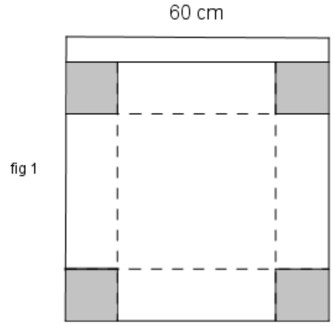
$b)$

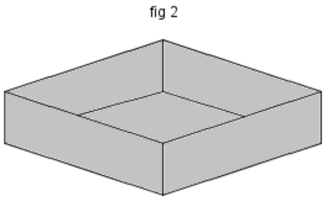
$$f'(x) = \frac{1}{2x - x^2} \cdot \left(2 - 2x\right) = \frac{2\left(1-x\right)}{x\left(2-x\right)} \Rightarrow Creciente \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2\left(1-x\right)}{x\left(2-x\right)} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x > 0 \\ 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1 \\ 2 - x > 0 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

	0	1	2
2 > 0	**(+)**	**(+)**	
x > 0	**(+)**	**(+)**	
x < 1	**(+)**	**(-)**	
x > 2	**(+)**	**(+)**	
Solución	**(+)**	**(-)**	

Creciente $\forall x \in \Re / 0 < x < 1$ **Decreciente** $\forall x \in \Re / 1 < x < 2$

2.- Se va a construir una caja sin tapa a partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado, recortando cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina tal y como se muestra en la figura 1, doblando después de la manera adecuada, tal y como vemos en la figura 2. Calcular las medidas de la caja para que su volumen sea máximo.





Siendo el lado del cuadrado recortado h que es, a su vez, la altura de la caja

$$V = (60-2h)h = 60h - 2h^2 \Rightarrow V' = \frac{dV}{dh} = 60 - 4h = 4(15-h) \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow 4(15-h) = 0 \Rightarrow 15 - h = 0 \Rightarrow h = 15$$

$$V'' = \frac{d^2V}{dh^2} = -4 \Rightarrow h = 15\ cm$$

3.- Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my = 2 \\ -2x + (m+1)y + z = 0 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 6 \end{cases}$

a) Discutirlo en función del parámetro m.

b) Resolverlo para el caso m = -1.

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & m+1 & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 3m+1 & 1 \\ 0 & m-1 & m+2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3m+1 & 1 \\ m-1 & m+2 \end{vmatrix} = (3m+1)(m+2) - (m-1)$$

$$|A| = 3m^2 + 6m + m + 2 - m + 1 = 3m^2 + 6m + 3 = 3\left(m^2 + 2m + 1\right) \Rightarrow Si \ \ |A| = 0 \Rightarrow 3\left(m^2 + 2m + 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -1$$

$$\forall x \in \Re - \{-1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ m = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$rang\ (A) = rang\ (A/B) = 2 < Número\ de\ incógnitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ m = -1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow x - y = 2 \Rightarrow x = y + 2 \Rightarrow y + 2 - 3y + z = 6 \Rightarrow z = 4 + 2y$$

$$Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (2 + \lambda\ ,\ \lambda\ ,\ 4 + 2\lambda)$$

4.- Sean los puntos A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1).

a) Hallar la ecuación del plano que los contiene.

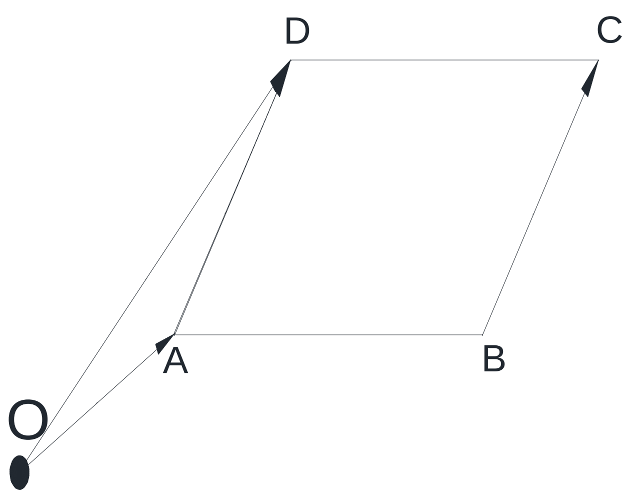
b) Determinar las coordenadas de un punto D, de forma que A, B, C y D sean los vértices de un paralelogramo

a) Los vectores AB, AC y AG, en el que G es el punto genérico del plano, son coplanarios y, por ello, el volumen del tetraedro que forma (el producto mixto de los tres) es nulo y la ecuación genérica del plano π pedido

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(1,0,0)=(-1,1,0) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,1)-(1,0,0)=(-1,0,-1)\equiv(1,0,1) \\ \overrightarrow{AG}=(x,y,z)-(1,0,0)=(x-1,y,z) \end{cases} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow(x-1)-z+y=0\Rightarrow$$

$\pi\equiv x+y-z-1=0$

a) Siendo **O** el origen de coordenadas se tiene



$$\begin{cases} \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{OA}=(1,0,0)-(0,0,0)=(1,0,0) \\ \overrightarrow{BC}=(0,0,1)-(0,1,0)=(0,-1,1) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OD}=(1,0,0)+(0,-1,1)=(1,-1,1)\Rightarrow D(1,-1,1)$$